# Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

## Aufgabe 4

Bestimme jene Funktionenschar bestehend aus ganzrationalen Funktionen 4. Grades, die alle achsensymmetrisch zur $y$-Achse sind, die Wendestelle $\sqrt{2}$ und das Maximum 0 haben!
Eine Funktion $f$ der Schar hat die Gestalt

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c\,,$$

da wegen der Achsensymmetrie keine ungeraden Potenzen vorkommen. Es gilt

$$f'(x) = 4ax^3 + 2bx \qquad \text{und} \qquad f''(x) = 12ax^2 + 2b\,.$$

Aus der Bedingung „Wendestelle $\sqrt{2}$" folgt $f''(\sqrt{2}) = 0$ oder

$$24a + 2b = 0\,.$$

### 1. Lösungsweg

Jede achsensymmetrische und stetige Funktion hat an der Stelle $x = 0$ einen Extrempunkt. Aus den Angaben folgt $f(0) = 0$, d. h. $c = 0$. Damit folgt $b = -12a$.
*Antwort:* Die gesuchte Funktionenschar ist

$$f_a(x) = ax^4 - 12ax^2\,.$$

### 2. Lösungsweg

Daraus folgt $b = -12a$. Somit ist $f'(x) = 4ax^3 - 24ax$. Für die Extrempunkte gilt $f'(x) = 0$:

$$\begin{aligned} 4ax^3 - 24ax &= 0 \quad \mid : 4ax \\ x^2 &= 6\,. \end{aligned}$$

Damit ist $x_{1,2} = \pm\sqrt{6}$. Wegen der Achsenymmetrie reicht es nur einen Wert zu untersuchen. Mit $f(\sqrt{6}) = 0$ folgt

$$\begin{aligned} & 36a + 6b + c = 0 \\ \Longrightarrow \quad & 36a - 72a + c = 0\,. \end{aligned}$$

Dies ergibt $c = 36a$.

*Antwort:* Die gesuchte Funktionenschar ist

$$f_a(x) = ax^4 - 12ax^2 + 36a\,.$$

Die zwei Lösungswege haben zu zwei unterschiedlichen Ergebnissen geführt.
Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?