Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Weitere Informationen zu den Aufgaben und zum Wettbewerb finden sich unter http://www.wurzel.org/werkstatt.

Aufgabe 8

Untersuche den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^n}$ für $n \in \{2,3,4,5\}$.

1. Lösungsweg

Da wir es mit „$\frac{0}{0}$“ zu tun haben, wenden wir den Satz des l'Hospital an.

$\underline{n=2:}$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(-\frac{1}{2}\sin x\right) = 0.$

$\underline{n=3:}$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-x\sin x}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{\sin x}{x} = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 1 = -\frac{1}{3}.$

$\underline{n=4:}$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-x\sin x}{4x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \left(-\frac{1}{4x}\right) \cdot \frac{\sin x}{x}.$

Es ist aber $\left(-\frac{1}{4x}\right) \cdot \frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x<0]{x\to 0} -\infty \cdot 1$ und $\left(-\frac{1}{4x}\right) \cdot \frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x>0]{x\to 0} +\infty \cdot 1.$

Wegen $-\infty \neq +\infty$ existiert der Grenzwert für $n=4$ nicht.

$\underline{n=5:}$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^5} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-x\sin x}{5x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \left(-\frac{1}{5x^2}\right) \cdot \frac{\sin x}{x} = (-\infty) \cdot 1 = -\infty.$

Antwort: Der Grenzwert ist 0 für $n=2$, $-\frac{1}{3}$ für $n=3$, existiert nicht für $n=4$ und ist $-\infty$ für $n=5$.

2. Lösungsweg

Wir untersuchen den Grenzwert für ein beliebiges n.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^n} &= \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{x^n}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^n}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x^n}\cdot\cos x\right)-\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{x^{n-1}}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{n-1}}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{n-1}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{n-1}}\cdot 1-1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{n-1}}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Antwort: Der Grenzwert ist 0 für jedes n.

Die zwei Lösungswege haben außer für $n=2$ zu unterschiedlichen Ergebnissen geführt.

Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?